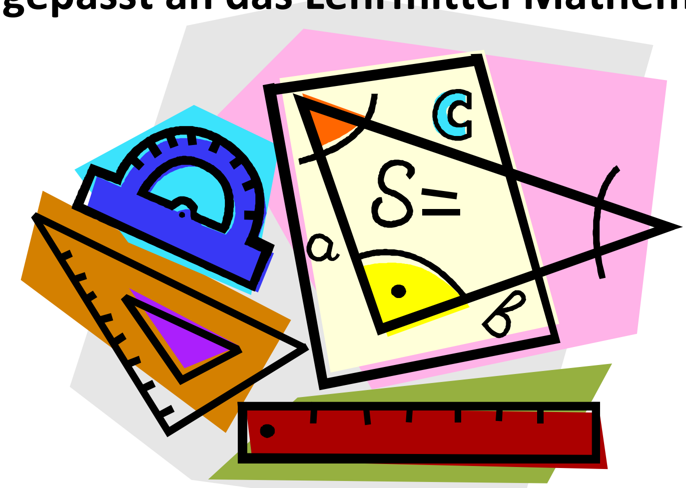
Name:

Geometrie-Dossier

7 – Ebene Figuren

(angepasst an das Lehrmittel Mathematik 1)



Inhalt:

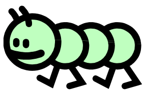
- **Fläche und Umfang von Rechteck und Quadrat**
- **Dreiecke (Benennung, Konstruktion)**
- **Winkelberechnung im Dreieck und in Vielecken**
- **Vielfältige Vierecksformen (Bezeichnungen und Eigenschaften)**
- **Konstruktion von Parallelenvierecken, Trapez und Drachen**
- **Flächenberechnung im Dreieck, in Parallelenvierecken, Trapez und Drachen**

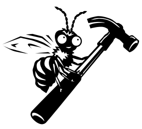
Online findest du dieses und andere Dossiers unter www.andiraez.ch/schule

---

Verwendung:

Dieses Geometriedossier orientiert sich am Unterricht und liefert eine Theorie-Zusammenfassung. Bei Konstruktionen sind natürlich viele Wege möglich, hier wurde als Musterlösung jeweils ein möglichst einfacher Weg gewählt.

einfache Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet*

schwierigere Aufgaben sind mit einem  *gekennzeichnet.*

Die <u>Aufgaben müssen in der Freizeit</u> (oder in der Hausaufgabenstunde) <u>gelöst werden</u>. Sie können jederzeit zur Kontrolle abgegeben werden, die Lösungen können aber auch selbständig verglichen werden. Fragen dürfen natürlich auch immer gestellt werden.

Achtung: Konstruktionen unbedingt mit Zirkel, Massstab, gespitztem Bleistift durchführen. Feine Striche verwenden!

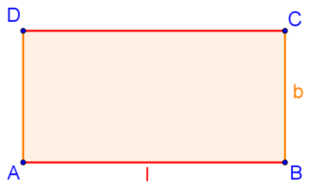
Konstruktionen: *Lösungen rot (weitere Lösungen in ähnlichen Farben, orange, gelb, etc.)*
Skizzen: Gegebenes GRÜN, Gesuchtes ROT. Rest Bleistift oder schwarzer Fineliner.

1. Fläche und Umfang von Rechteck und Quadrat

1.1 Der Umfang

Bei jeder ebenen Figur kann um die Figur herum eine Schnur gespannt werden. Diese Schnur führt also ganz um die Figur herum. Sie bezeichnet den Umfang der Figur. **Der Umfang u lässt sich also als Summe aller Seiten berechnen.** Bei Rechtecken und Quadraten lässt sich der Umfang relativ einfach berechnen, da sich die Seiten ja wiederholen.

<u>Der Umfang im Rechteck:</u>

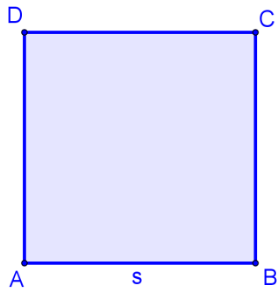


Umfang = Länge plus Breite plus Länge plus Breite

u $= l + b + l + b = l + l + b + b = 2 \bullet l + 2 \bullet b = 2 \bullet (l+b)$

Die abgewickelte „Umfangschnur" sieht so aus:

<u>Der Umfang im Quadrat:</u>



Umfang = Seite plus Seite plus Seite plus Seite

u $= s + s + s + s = 4 \bullet s$

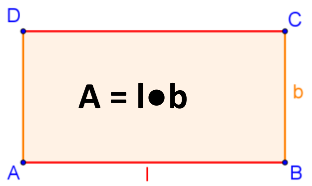
Die „Schnur" (Umfang) sieht dann so aus:

1.2 Die Fläche

Jede Ebene Figur nimmt eine Fläche ein, d.h. sie „belegt" einen Teil der Ebene. Für die Fläche wird in der Geometrie die Abkürzung „A" (von engl. Area) verwendet. Als Einheit werden die Flächenmasse verwendet, für unsere Beispiele häufig cm^2 oder mm^2.

Die Fläche bei Rechteck und Quadrat berechnet sich bekanntlich mit der Formel „Länge mal Breite".

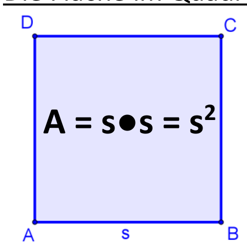
<u>Die Fläche im Rechteck:</u>



Fläche = Länge mal Breite

$A_{\text{Rechteck}} = l \bullet b$

<u>Die Fläche im Quadrat:</u>



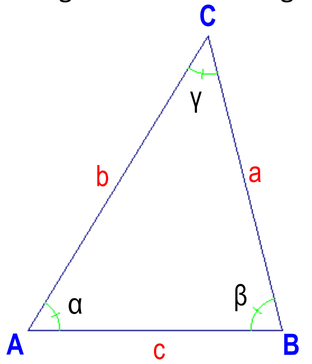
Fläche = Länge mal Breite (in diesem Fall = Seite mal Seite)

$A_{\text{Quadrat}} = s \bullet s = s^2$

2. Dreiecke

2.1 Bezeichnungen und Begriffe

Im allgemeinen Dreieck gelten die folgenden Bezeichnungen:



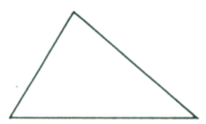
A, B, C:	Eckpunkte des Dreiecks
a, b, c:	Dreiecksseiten (AB = c; BC = a, AC = b)
α, β, γ:	Winkel im Dreieck (α = BAC, β = ABC, γ = BCA)

2.2 Spezielle Bezeichnungen von Dreiecken

Natürlich sind nicht alle Dreiecke gleich in ihrem Aussehen. **So richtet sich die Bezeichnung von Dreiecken nach ihren Seitenlängen und ihren Winkeleigenschaften**:

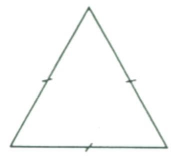
a) Teil A: Bezeichnung von Dreiecken nach ihrer Seitenlänge:

Werden nur die Seiten betrachtet, können sie entweder alle verschieden lang sein. Aber es können auch entweder zwei oder sogar alle drei Seiten gleich lang sein. Entsprechend bezeichnet man die Dreiecke wie folgt:



ungleichseitig (allgemein)
keine gleich langen Seiten

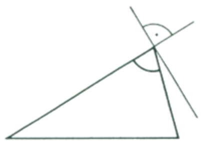
gleichschenklig
zwei gleich lange Seiten (und zwei gleiche Winkel)



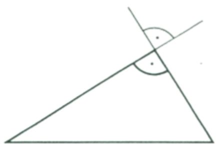
gleichseitig
drei gleich lange Seiten (und drei gleiche 60°- Winkel)

b) Teil B: Bezeichnung von Dreiecken nach ihren Winkeln:

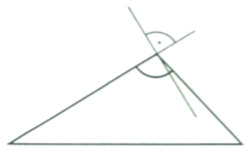
Werden nur die Winkel betrachtet, so können entweder alle Winkel kleiner als 90° sein oder es kann einer von drei Winkeln gleich oder grösser 90° sein. Entsprechend teilt man die Dreiecke ein:



spitzwinklig
alle Winkel kleiner als 90°



rechtwinklig
ein Winkel ist gleich 90°

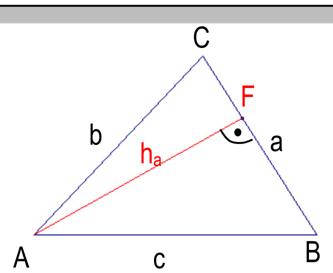


stumpfwinklig
ein Winkel ist grösser als 90°

Insgesamt werden diese beiden Angaben kombiniert: **Die Dreiecke heissen dann gleichschenklig-rechtwinklig, ungleichseitig-spitzwinklig oder stumpfwinklig-gleichschenklig**.

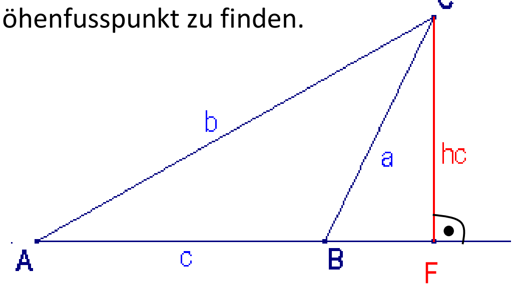
2.3 Die Höhe im Dreieck

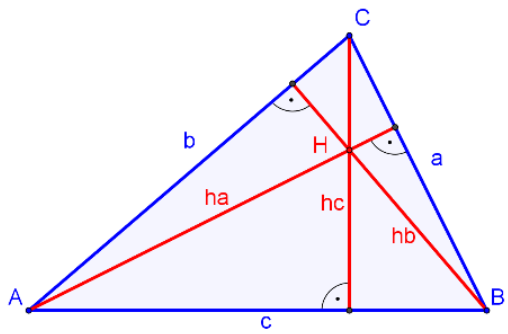
Als **Höhe** bezeichnet man die **Lotstrecke auf eine Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt**. (➔ Die Höhe steht senkrecht auf einer Dreiecksseite und geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt)



Bezeichnung:
h_a: Höhe auf die Seite a (und durch den Eckpunkt A)
h_b: Höhe auf die Seite b (und durch den Eckpunkt B)
h_c: Höhe auf die Seite c (und durch den Eckpunkt C)
F: Höhenfusspunkt (Schnittpunkt der Höhe mit der Dreiecksseite)

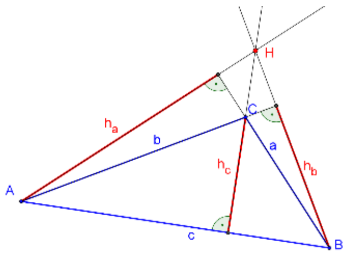
Speziell: **Die Höhe kann auch ausserhalb des Dreiecks verlaufen.** In diesem Fall verlängert man ganz einfach die Dreiecksseite, um den Höhenfusspunkt zu finden.



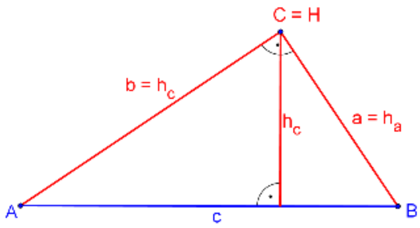


Alle Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt H.

stumpfwinkliges Dreieck:
Der Höhenschnittpunkt liegt ausserhalb des Dreiecks



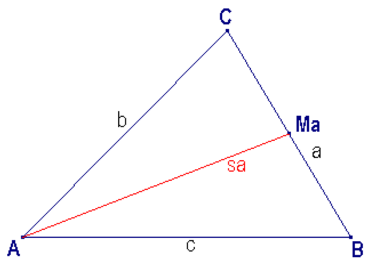
rechtwinkliges Dreieck:
Der Höhenschnittpunkt fällt mit der Ecke beim rechten Winkel zusammen.



Die Höhe wird für die Konstruktion häufig verwendet. Die Grundkonstruktion mit Höhen findet sich unter dem Punkt „Konstruktionshilfen“

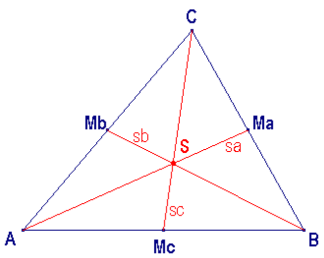
2.4 Die Schwerlinie im Dreieck

Als **Schwerlinie (Seitenhalbierende)** bezeichnet man die **Verbindung der Seitenmitte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt.**



Bezeichnung: s_a: Schwerlinie der Seite a
s_b: Schwerlinie der Seite b
s_c: Schwerlinie der Seite c

M_a: Mittelpunkt der Seite a
M_b: Mittelpunkt der Seite b
M_c: Mittelpunkt der Seite c

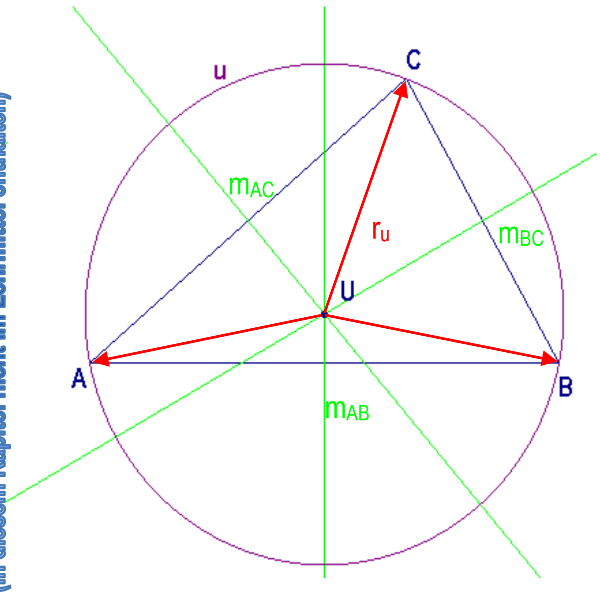


Alle Schwerlinien schneiden sich im Schwerpunkt S.
Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinie im Verhältnis 2:1

Auch die Schwerlinien spielen in Konstruktionsaufgaben eine Rolle. Auch hier finden wir die entsprechende Grund-konstruktion unter dem Punkt „Konstruktionshilfen“

Zusatzinformation
(In diesem Kapitel nicht im Lehrmittel enthalten)

2.5 Der Umkreis eines Dreiecks



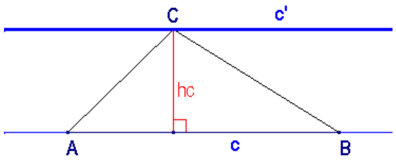
Alle Eckpunkte eines Dreieckes liegen auf dem Umkreis. Der Umkreismittelpunkt hat also die Eigenschaft, dass er von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt ist.

Der Umkreismittelpunkt U ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten.

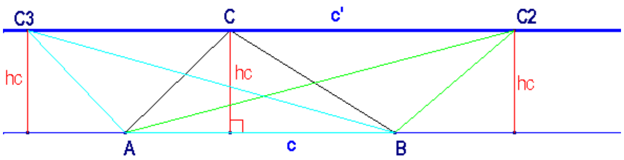
Der Umkreisradius u hat die Länge der Entfernung von U zu einem der drei Eckpunkte.
Es gilt UA = UB = UC.

3. Konstruktionshilfen für die Konstruktion von Dreiecken

3.1 Arbeiten mit der Höhe: Der Höhenstreifen



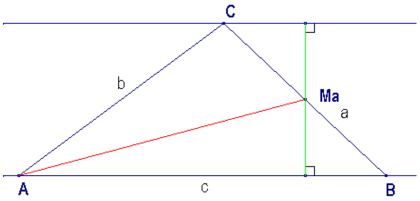
Die Höhe ist die senkrechte Verbindung zwischen Dreiecksseite und ihrer gegenüberliegenden Ecke. Diese Definition entspricht der Formulierung: „**Der Eckpunkt hat von der gegenüberliegenden Dreiecksseite den Abstand h.“** So ist der Eckpunkt nichts anderes als ein spezieller Punkt, **der von einer Gerade (Dreiecksseite) einen bestimmten Abstand hat. Alle möglichen Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf einer Parallelen zur Geraden (Dreiecksseite).** Im Fall des Dreiecks verwenden wir aber nicht zwei, sondern nur eine Parallele (sonst erhalten wir das Dreieck und sein Spiegelbild bezüglich der Dreiecksseite).



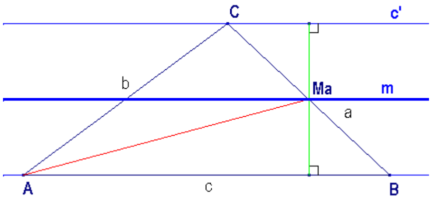
Die **Parallele zur Dreiecksseite im Abstand h heisst „Höhenstreifen“.** Bei Dreiecken mit gleicher Höhe hc liegen die Eckpunkte C alle auf dem Höhenstreifen c’

Höhenstreifen:
Bei gegebener Höhe liegt die zugehörige Ecke auf einer Parallelen zur gegenüberliegenden Seite!

3.2 Arbeiten mit der Schwerlinie (Seitenhalbierenden): Die Mittelparallele



Die Schwerlinie verbindet Seitenmittelpunkt mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt. Interessant für die Konstruktion ist eigentlich vor allem der Seitenmittelpunkt. Dieser liegt ja genau in der Mitte der Dreiecksseite, das heisst, er hat von **beiden Eckpunkten gleiche Entfernung**. Zeichnet man dazu die beiden Parallelen (siehe Höhenstreifen), so liegt der **Seitenmittelpunkt so, dass er von beiden Parallelen den gleichen Abstand hat.**

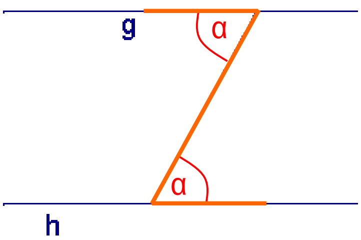


Der Seitenmittelpunkt M **liegt auf der Mittelparallelen m des Höhenstreifens (hier Höhenstreifen h_c)**

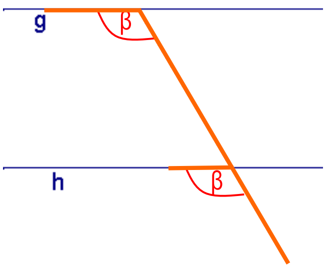
Schwerlinie:
Der Seitenmittelpunkt einer Dreiecksseite liegt auf der Mittelparallele des passenden Höhenstreifens!

4. Winkel im Dreieck

4.1 Winkel an Parallelen



Z-Winkel sind gleich gross
(*Wechselwinkel an Parallelen)*

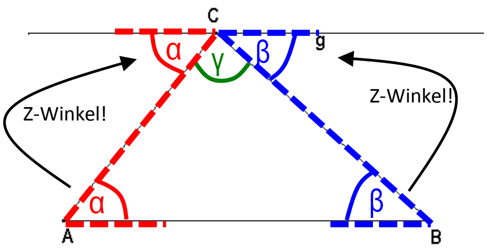


F-Winkel sind gleich gross
(*Stufenwinkel an Parallelen)*

4.2 Die Winkelsumme im Dreieck

Die Summe aller drei Winkel im Dreieck beträgt immer 180°. Dies ist eine Grundregel der Geometrie und gilt für jedes beliebige Dreieck.

Nachfolgend findet sich der Beweis für diese Behauptung:



Durch die Z-Winkel-Überlegung finden wir die Winkel an der Parallelen g zur Grundseite AB. So sehen wir schon rein optisch, dass die Winkel α+ β + γ in ihrer Summe 180° ergeben.

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°

Aufgaben "Dreiecke":

1. Konstruiere aus den folgenden Angaben die Dreiecke ABC:

a) AC = 39mm
AB = 66mm
BC = 45mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

b) c = 5.4 cm
a = 3.9 cm
b = 4.2 cm

Skizze / KB:

Konstruktion:

c) AC = 56mm
AB = 65mm
α = 120°

Skizze / KB:

Konstruktion:

d) AB = 68mm
α = 60°
h_c = 41mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

e)

AB = 64mm
α = 56°
β = 35°

Skizze / KB:

Konstruktion:

f)

AC = 48mm
AB = 45mm
γ = 60°

Skizze / KB:

Konstruktion:

g)

AC = 65mm
AB = 63mm
β = 60°

Skizze / KB:

Konstruktion:

h)

AC = 44 mm
γ = 80°
hc = 40 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

i)

α = 60°
β = 45°
h_c = 43 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

j)

b = 41 mm
α = 60°
h_b = 35mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

k)
AB = 40mm
BC = 50mm
h_c = 30 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

l)
BC = 35mm
AC = 45 mm
h_c = 30mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

m)
BC = 30mm
α = 60°
h_c = 28 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

n)
BC = 46 mm
β = 45°
s_a = 50 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

o)
AB = 60mm
AC = 40mm
s_c = 35 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

p)
AB = 30 mm
α = 30°
s_b = 40 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

q) AC = 54mm
s_a = 48 mm
h_c = 28 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

r) AB = 53 mm
h_c = 35 mm
h_a = 45 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

s) AB = 61mm
h_b = 50mm
h_c = 40mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

t) AB = 50mm
s_a = 43 mm
h_b = 29 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

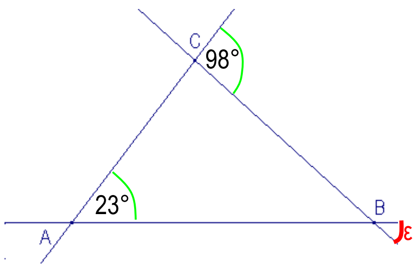
u) BC = 42mm
s_a = 59 mm
h_b = 39 mm

Skizze / KB:

Konstruktion:

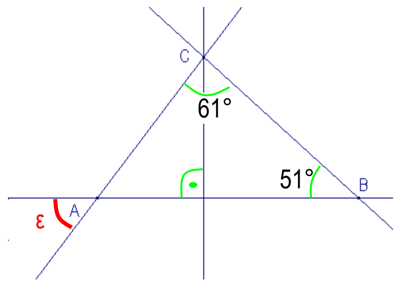
2. Berechne die gesuchten Winkel:

a)



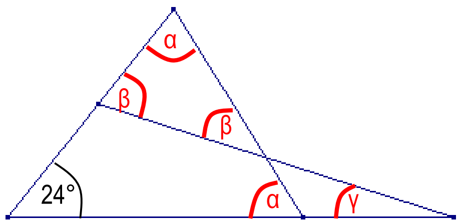
Berechne den Winkel ε.

b)



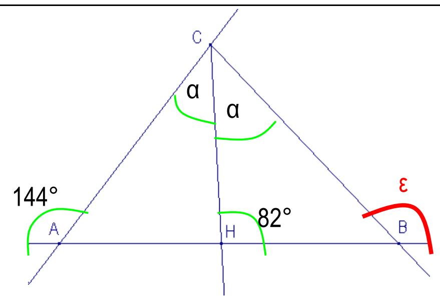
Berechne den Winkel ε.

c)



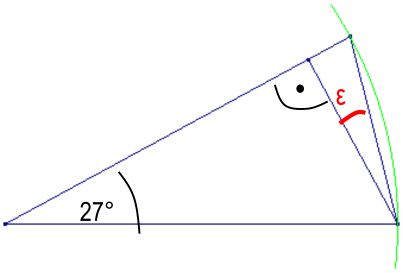
Berechne die Winkel α, β, γ.

d)



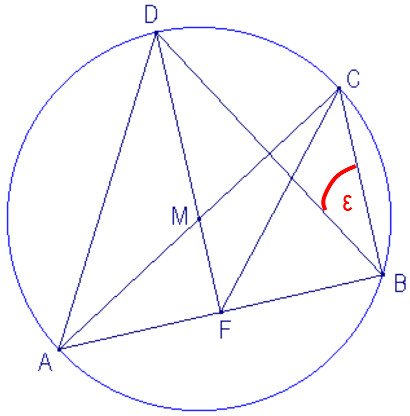
Berechne den Winkel ε.

e)



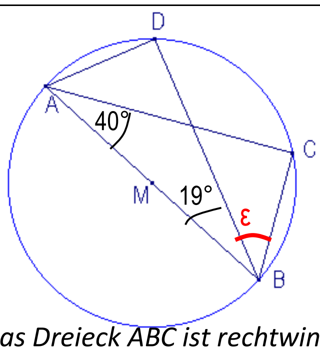
Berechne den Winkel ε.

f)



(Das Dreieck ABC ist rechtwinklig – 90° bei B)
Berechne den Winkel ε.

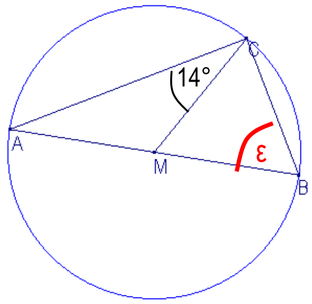
g)



(Das Dreieck ABC ist rechtwinklig – 90° bei C,
das Dreieck ABD ist rechtwinklig – 90° bei D)

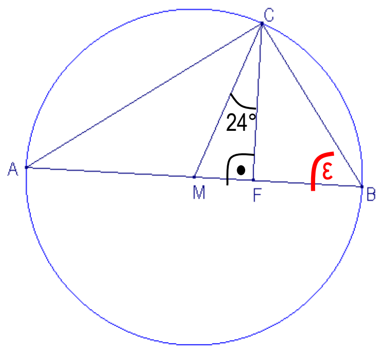
Berechne den Winkel ε.

h)



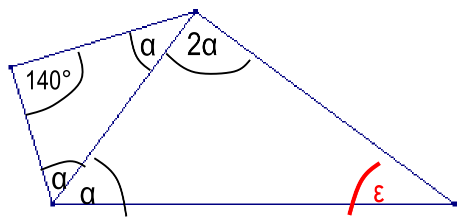
(Das Dreieck ABC ist rechtwinklig – 90° bei C)
Berechne den Winkel ε.

i)



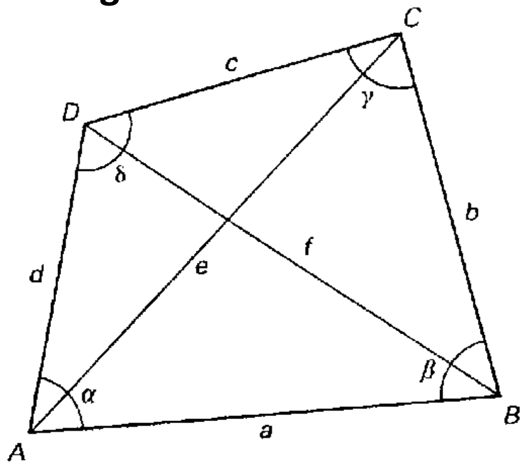
(Das Dreieck ABC ist rechtwinklig – 90° bei B)
Berechne den Winkel ε.

j)



Berechne den Winkel ε.

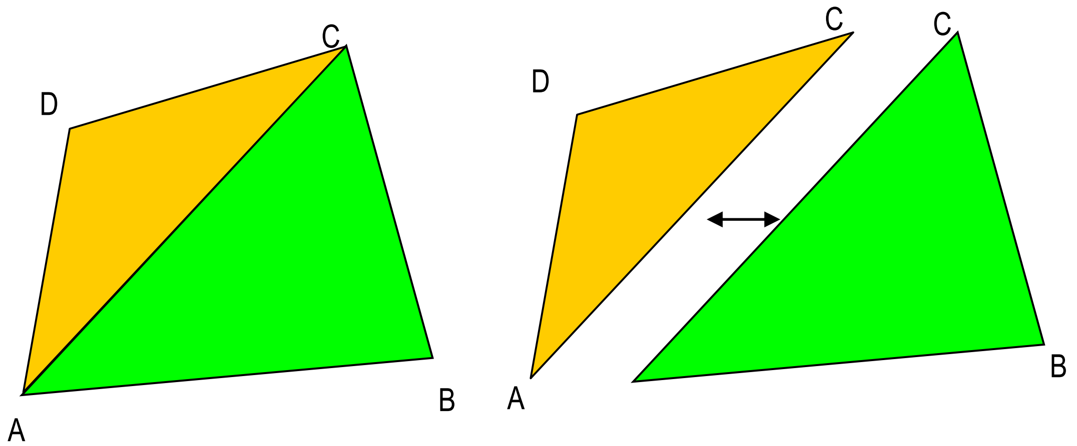
5. Allgemeine Vierecke



Das Viereck ist eine (ebene) Figur mit

4 Ecken:	A, B, C, D
4 Seiten	AB (=a), BC (=b), CD (=c), DA (=d)
4 Winkel	$\alpha = \measuredangle$ DAB, $\beta = \measuredangle$ ABC $\gamma = \measuredangle$ BCD, $\delta = \measuredangle$ CDA
2 Diagonalen	AC (=e), BD (=f)

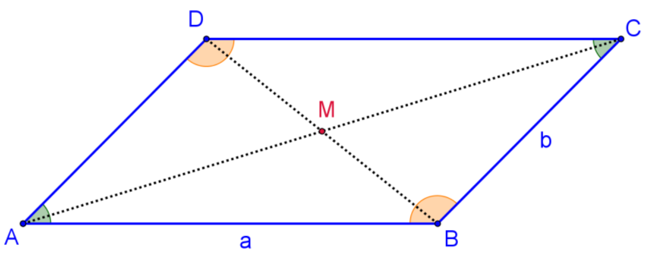
Eigenschaften: **Die Winkelsumme in jedem Viereck beträgt 360°**
(denn jedes Viereck kann in zwei Teildreiecke zerlegt werden, hier z.B. ABC und ACD)



➔ Prinzipiell kann jede beliebige Figur (also ein n-Eck oder Vieleck) in Dreiecke zerlegt werden.

6. Parallelenvierecke

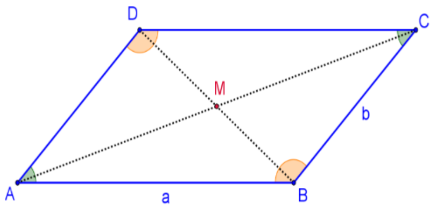
6.1 Definition von Parallelenvierecken



- sind punktsymmetrisch am Diagonalenschnittpunkt
- Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang (AB = CD, BC = AD)
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich gross ($\alpha=\gamma;\beta = \delta$)
- Benachbarte Winkel ergänzen sich auf 180° ($\alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\delta+\alpha$ = 180°)
- Die **Diagonalen werden von M halbiert**

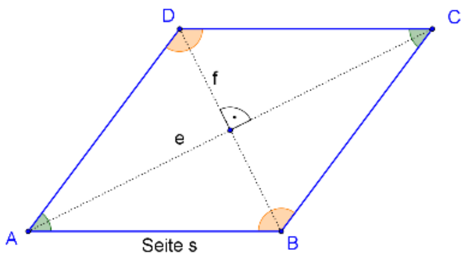
6.2 Die Eigenschaften der verschiedenen Parallelenvierecke.

Die nachfolgende Tabelle zeigt neben dem Aussehen und dem Namen des entsprechenden Parallelenviereckes die speziellen Eigenschaften jeder einzelnen Figur. Diese Liste ist enorm wichtig, will man Parallelenvierecke konstruieren. Denn durch die Kenntnis der einzelnen Eigenschaften ergeben sich viele Konstruktionswege.



Rhomboid (Parallelogramm)

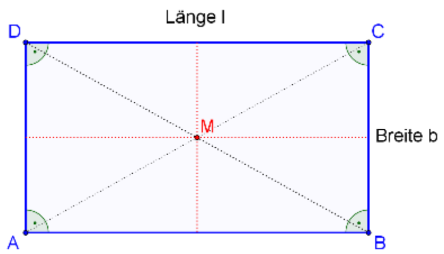
- „Das normale Parallelenviereck“ (Eigenschaften siehe oben)



Rhombus (Raute)

Hat alle Eigenschaften des Rhomboid.
Zusätzliche Eigenschaften:

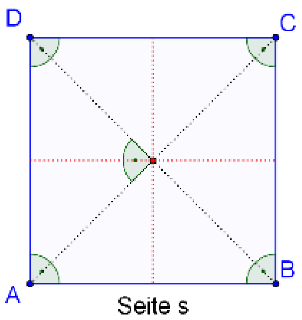
- alle Seiten sind gleich lang
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Rhombus-Winkel
- Hat 2 Symmetrieachsen (Diagonalen)



Rechteck

Hat alle Eigenschaften des Rhomboid.
Zusätzliche Eigenschaften:

- Alle Winkel sind 90°
- Die Diagonalen sind gleich lang
- 2 Symmetrieachsen (Mittelparallelen)



Quadrat

Hat alle Eigenschaften des Rhomboid.
Zusätzliche Eigenschaften:

- Alle Seiten sind gleich lang
- Alle Winkel sind 90°
- Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel
- 4 Symmetrieachsen (Diagonalen und Mittelparallelen)
- Jedes Quadrat ist sowohl ein Rhombus als auch ein Rechteck *(da es über alle entsprechenden Eigenschaften verfügt.)*

6.3 Konstruktion von Parallelenvierecken:

Skizze: Für jede Konstruktion braucht es anfänglich eine Skizze. Diese **beginnt in jedem Fall mit der Lösung** (also die Figur, die man konstruieren soll). Die Skizze ist nicht massstabgetreu, sie muss aber die richtige Form aufweisen. (Wenn ein Rhombus konstruiert werden soll, muss die Skizze auch ein Rhombus darstellen, sonst macht es keinen Sinn). **In der Skizze werden alle gegebenen Dinge (Punkte, Geraden, Winkel) mit GRÜN markiert.**

Konstruktionsplan / Konstruktionsbericht (oder einfach: Lösungsweg):

Um den Lösungsweg zu finden, wird die Skizze bearbeitet. Man kann dort zusätzliche Informationen einzeichnen, kann die Lösung so entwickeln. Die gefundenen Schritte werden nun der Reihe nach aufgeschrieben. So wird der Lösungsweg Schritt für Schritt aufgeschrieben. Wenn möglich verwenden wir im Konstruktionsbericht geometrische Abkürzungen und Symbole.

Aufgabenlösung:

Nachdem der Lösungsweg steht, muss nur noch gezeichnet werden. Dies ist reines Handwerk, bedarf aber einer genauen, sauberen und sorgfältigen Arbeitsweise.

Aufgaben Konstruktion von Parallelenvierecken:

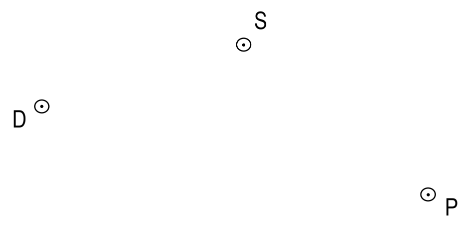
1. Konstruiere das gesuchte Parallelenviereck ABCD. (S ist jeweils Diagonalenschnittpunkt)

a) Rechteck mit $P \in AB$

Skizze:

KB:

Konstruktion:

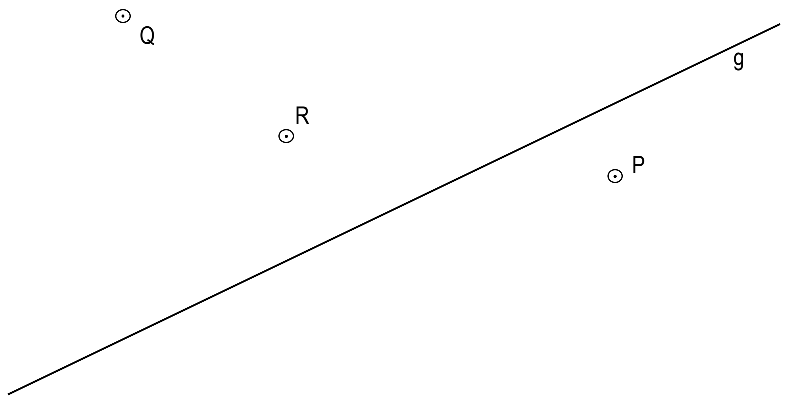


b) Rhombus mit $AC \subseteq g$, $P \in BC$, $Q \in CD$, $R \in BD$ *(die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen)*

Skizze:

KB:

Konstruktion:

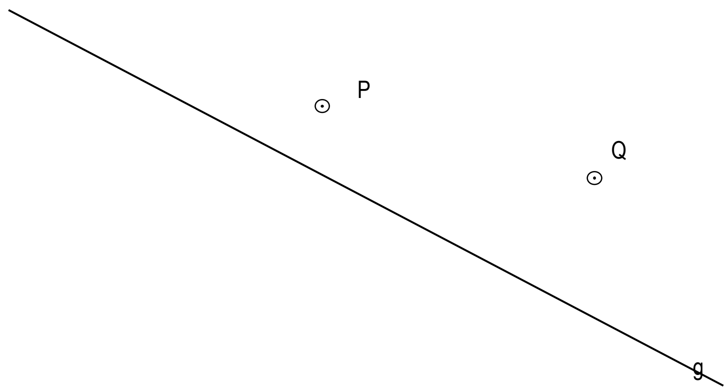


c) Quadrat mit $P \in AD$, $Q \in CD$ und $AC \subseteq g$ *(die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen)*

Skizze:

KB:

Konstruktion:

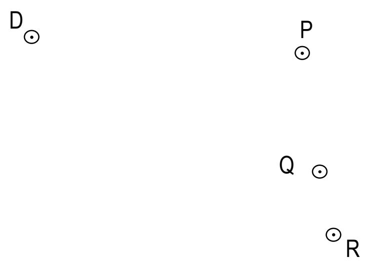


d) Rhombus mit $P \in CD$, $Q \in AC$, $R \in BD$

Skizze:

KB:

Konstruktion:

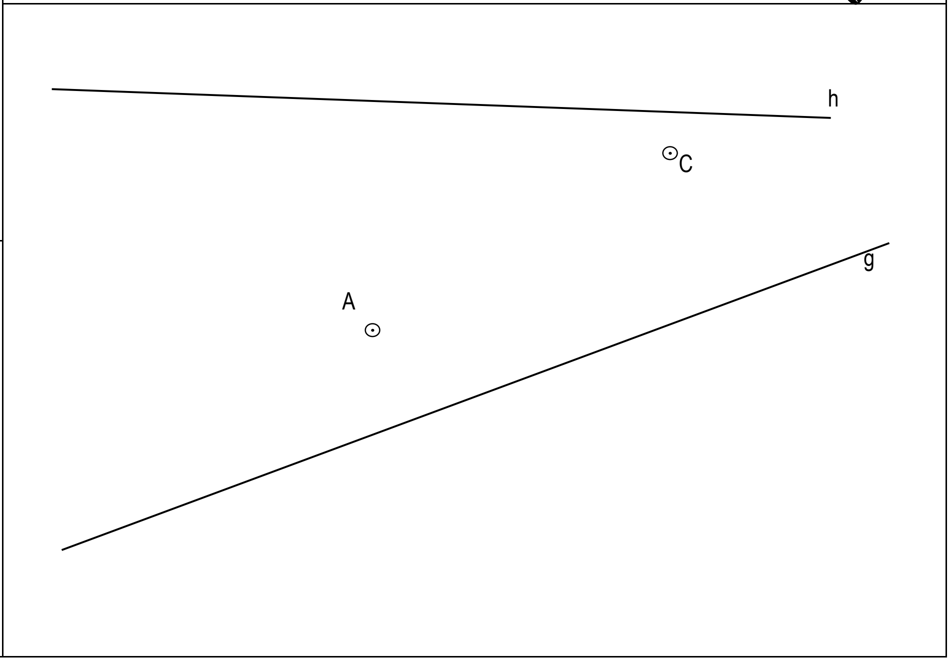


e) Ein Rhomboid mit der Ecke B auf g und der Ecke D auf h.

Skizze:

KB:

Konstruktion:

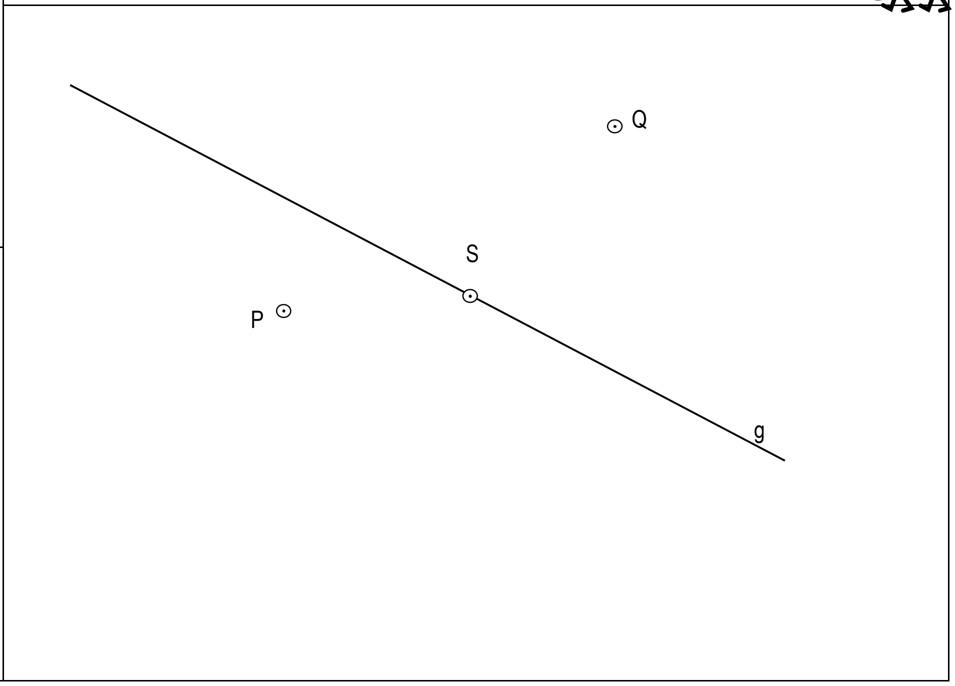


f) Rhombus mit $P \in AD$, $Q \in CD$ und $BD \subseteq g$ *(die Punkte können auch auf der Verlängerung der angegebenen Geraden liegen)*

Skizze:

KB:

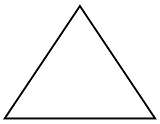
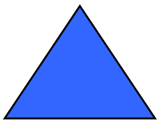
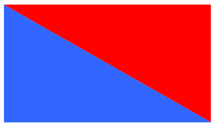
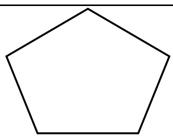
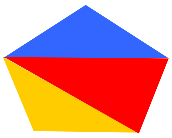
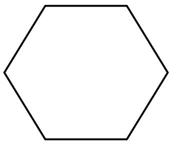
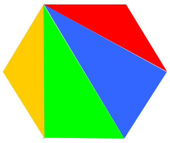
Konstruktion:



7. Winkelberechnung in Vielecken (oder eben n-Ecken)

Wie oben festgestellt, können alle n-Ecke in Dreiecke aufgeteilt werden (Das „n“ beim n-Eck steht für eine natürliche Zahl, die sinnvollerweise grösser als 2 ist. → für n=3 entsteht also ein 3-Eck, für n=4 ein 4-Eck usw.)

<u>Verschiedene n-Ecke im Test:</u>

n	*Form*	*Anzahl Teildreiecke*	*Winkelsummenberechnung*
3		1 	1 Dreieck mit 180° ➔ 1 • 180° = **180°**
4		2 	2 Dreiecke mit je 180° ➔ 2 • 180° = **360°**
5		3 	3 Dreiecke mit 180° ➔ 3 • 180° = **540°**
6		4 	4 Dreiecke mit 180° ➔ 4 • 180° = **720°**

Es fällt also auf, dass immer (n-2) Teildreiecke in ein n-Eck hineingestellt werden können. Somit gilt für die Berechnung der Winkelsumme ein einem allgemeinen n-Eck:

(Innen-) Winkelsumme im n-Eck = (n-2) • 180°

Nun kommen oft auch sogenannte regelmässige n-Ecke vor. *Diese haben die Eigenschaft, dass alle Innenwinkel und alle Seiten gleich sind.*

Im regelmässigen n-Eck lassen sich dank der Winkelsumme auch noch die einzelnen Innenwinkel berechnen: So ist im regelmässigen Viereck (also einem Quadrat) die Winkelsumme = 360° und somit ist ein einzelner Winkel = 360:4 = 90° (Das stimmt mit der uns bekannten Eigenschaft des Quadrates überein.) Entsprechend geht diese Überlegung für jedes andere regelmässige n-Eck:

Regelmässiges Dreieck (= Gleichseitiges Dreieck): Winkelsumme = 180° ➔ Ein Winkel = 180° : 3 = **60°.**
Regelmässiges Achteck Winkelsumme = 1080° ➔ Ein Winkel = 1080° : 8 = **135°.**
Regelmässiges Zehneck Winkelsumme = 1440° ➔ Ein Winkel = 1440° : 10 = **144°.**

Aufgaben Winkelberechnung:

1. Berechne die Winkelsumme in einem

a) 8-Eck ....

....

b) 13-Eck ....

....

c) 45-Eck ....

....

2. Berechne die Grösse eines Innenwinkels im

a) regelmässigen Sechseck ....

....

b) regelmässigen Fünfeck ....

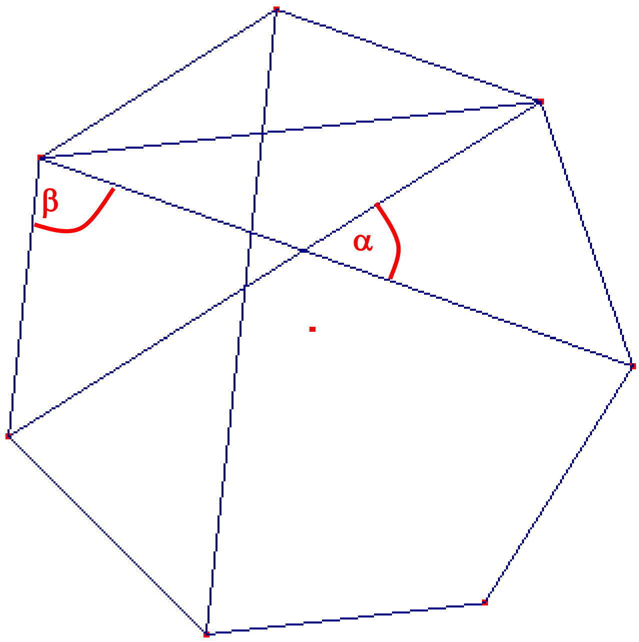
....

c) regelmässigen Dreizehneck ....

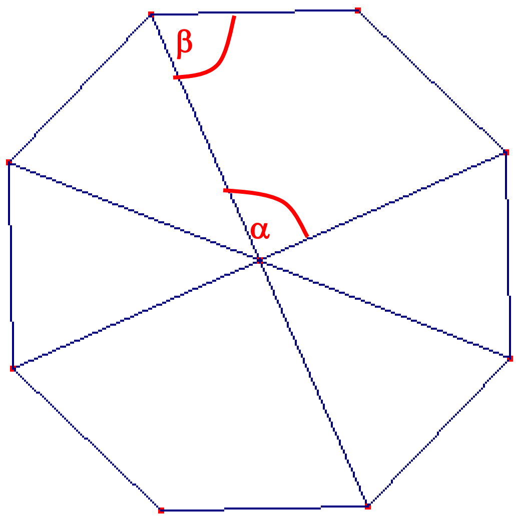
....

3. Bestimme die Grösse der Winkel α und β

a)



b)



α = ...

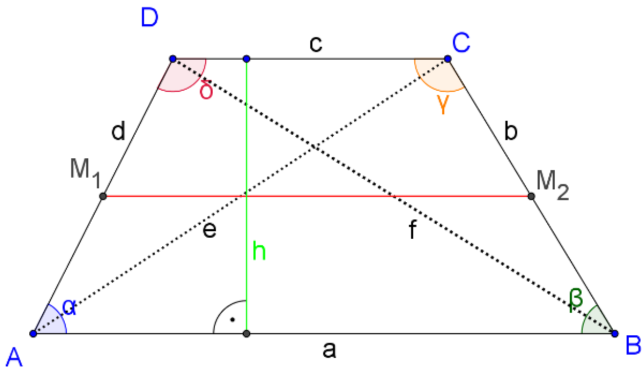
β = ...

α = ...

β = ...

8. Das Trapez

Unter den Vierecken gibt es – neben den Parallelenvierecken eine weitere Form, die über spezielle Eigenschaften verfügt. Es handelt sich dabei um das Trapez, welches “nur“ noch zwei parallele Seiten aufweist (Das Parallelenviereck hatte noch JE ZWEI parallele Seiten)



Das Trapez hat *mindestens zwei* parallele Seiten

AB = a :	Grundseite	
CD =c:	Deckseite	a // c !
BD = b, DA = d:	Schrägseiten	
h:	Höhe	
m:	Mittellinie (Mittelparallele a,c)	
M_1, M_2:	Mittelpunkt der Schrägseiten (diese werden durch die Mittellinie m halbiert!)	

Die Mittellinie im Trapez

Die Mittellinie m im Trapez hat eine wichtige Bedeutung für die Konstruktion und die Berechnung. Für Konstruktionen wichtig ist die Eigenschaft, dass die **Mittellinie Mittelparallele der Grund- und Deckseite** ist, für die Berechnung ist sie wichtig, da nur über die Mittellinie die Trapezfläche bestimmt werden kann.

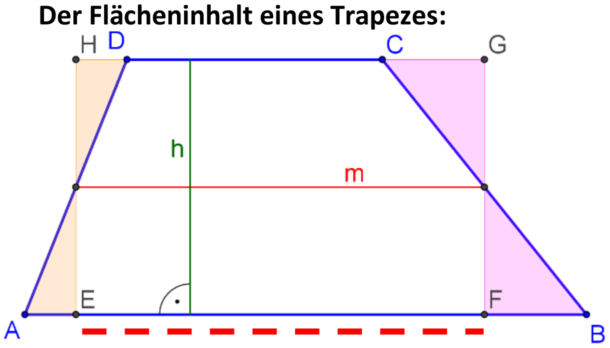
Berechnung von m:

$$\mathbf{m = \frac{Grundseite+Deckseite}{2} = \frac{a+c}{2} = (a+c) : 2}$$

Abgeleitete Formeln:
a = 2m – c
c = 2m – a

Die Mittellinie entspricht also dem arithmetischen Mittel von Grund- und Deckseite.

Der Flächeninhalt eines Trapezes:



Wird das Trapez wie unten angegeben aufgeteilt, können die im unteren Teil abgeschnittenen Dreiecke punktsymmetrisch am Schrägseitenmittelpunkt (M1, M2) nach oben verschoben werden. Somit lässt sich das Trapez in ein Rechteck verwandeln.

Es gilt:
Trapez ABCD und Rechteck EFGH sind flächengleich

Die Rechtecksfläche lässt sich jetzt wie folgt berechnen:
A = m • h (Rechtecksfläche = Grundseite mal Höhe)
Also muss die Trapezfläche gleich sein, also ebenfalls A = m • h (Trapezfläche = Mittellinie mal Höhe)

Berechnung der Trapezfläche:

$$\mathbf{A_{Tr} = Mittellinie \bullet Höhe = m \bullet h}$$

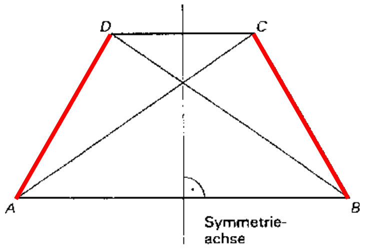
Gemäss Berechnung von m

$$\mathbf{A_{Tr} = [(a+c) : 2] \bullet h = \frac{a+c}{2} \bullet h}$$

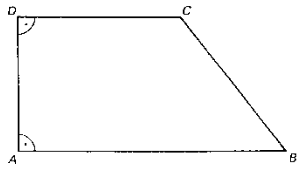
Abgeleitete Formeln:
m = A : h
h = A : m

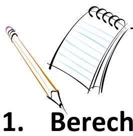
Spezielle Trapeze:

Das gleichschenklige Trapez ($\overline{BC} = \overline{AD}$ (Schenkel))



Das rechtwinklige Trapez





Aufgaben Berechnung im Trapez:

1. Berechne die fehlenden Grössen im Trapez:

	AB = a	CD = c	m	h	A
a)	15 cm	6 cm		9 cm	
b)	14 cm		18.5 cm		240.5 cm^2
c)		9cm		15 cm	513.75 cm^2
d)	24,5 cm			32 cm	1088 cm^2

2. Berechne die gesuchten Grössen im Trapez:

a)	Gegeben:	Gesucht:	Skizze:	Berechnungen
	a = 12 cm c= 8 cm Winkel BAD = 45° Winkel BDC = 45°	h= m = A=		
b)	**Gegeben:**	**Gesucht:**	**Skizze:**	**Berechnungen**
	d = 8 cm a = 8 cm Winkel BAD = 90° A = 214 cm^2	h= m= c =		

Aufgaben Trapez-Konstruktionen

3. Konstruiere das Trapez ABCD aus den folgenden Angaben:

a)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	a = 6.5 cm c= 4 cm Winkel BAD = 70° Winkel (AD, BC)=90°		
	Konstruktion:		

b)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	c = 6cm d = 4 cm m= 7cm Winkel DAB = 70°		
	Konstruktion:		

c)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	c = 6cm d = 4 cm a = 9cm α = 65°		
	Konstruktion:		

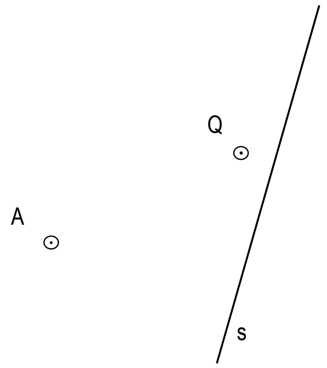
d)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	α = 65° β = 50° a = 9 cm c = 4 cm		
	Konstruktion:		

e)	Gegeben:	Skizze:	Konstruktionsplan:
	α = 65° Winkel BCD = 120° a = 7.5 cm b = 4.5 cm		

Konstruktion:

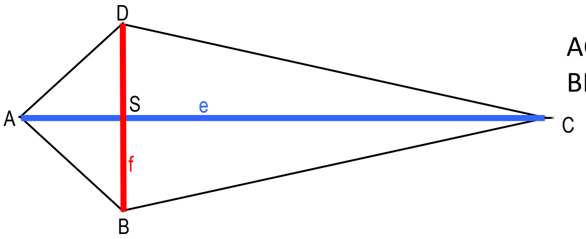
f) Konstruiere das gleichschenklige Trapez mit s = Symmetrieachse, Q = Schnittpunkt von m und BD.

Skizze:



9. Drachenviereck

Das Drachenviereck hat ebenfalls einige Spezialitäten, auf die hier nur kurz eingegangen werden soll:

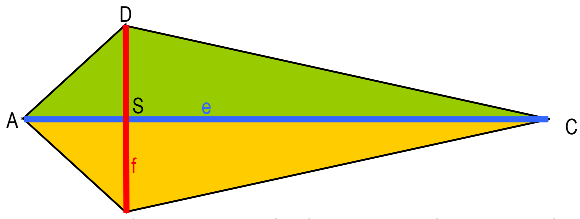


AC = e
BD = f

Betrachten wir das Drachenviereck, können wir feststellen

- dass die **Diagonale AC gleichzeitig Symmetrieachse ist.**
- **Die Diagonalen schneiden sich in S in einem rechten Winkel**

Das Drachenviereck lässt sich also für Berechnungen relativ einfach benutzen: So besteht es aus zwei gleichgrossen, kongruenten Dreiecken:



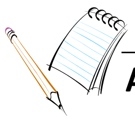
Die Fläche eines einzelnen Dreiecks beträgt demnach e • (f : 2) : 2 (➔ Grundseite mal Höhe durch 2)

Beide Dreiecke zusammen sind somit: e • (f : 2) : 2 • 2 = e • (f : 2)

<u>Berechnung der Fläche im Drachenviereck:</u>

A_{DV} = Diagnonale 1 • Diagonale 2 : 2 = e • f : 2 = $\frac{e \bullet f}{2}$

<u>Abgeleitete Formeln:</u>
e = A • 2 : f
f = A • 2 : e

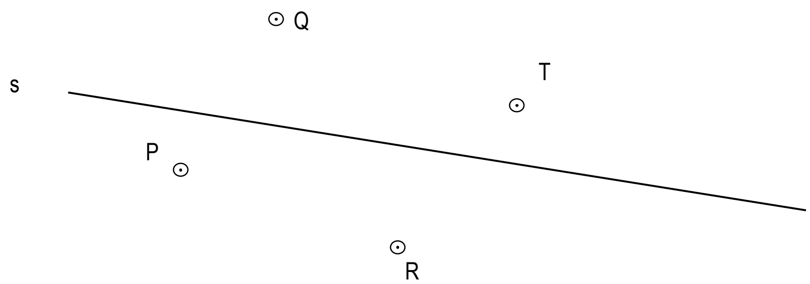


Aufgaben Drachenviereck

1. Berechne im Drachenviereck:

	Gegeben:	Gesucht:	Skizze:	Berechnungen
a)	AC = 12 cm BD= 8 cm	A		
b)	AC = 12 cm A = 156 cm^2	BD		

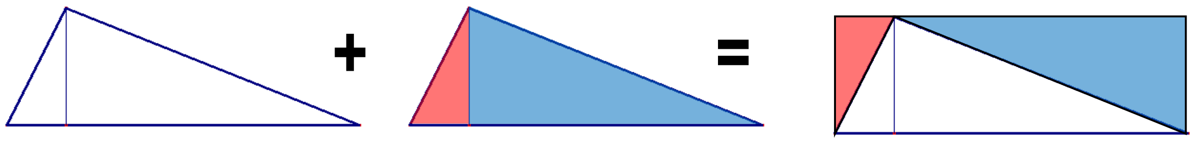
2. Konstruiere das Drachenviereck ABCD aus s = Symmetrieachse, AC ⊆ s, P ∈ AB, Q ∈ AD, R ∈ BC, T ∈ CD

	Skizze:	Konstruktion
a)		

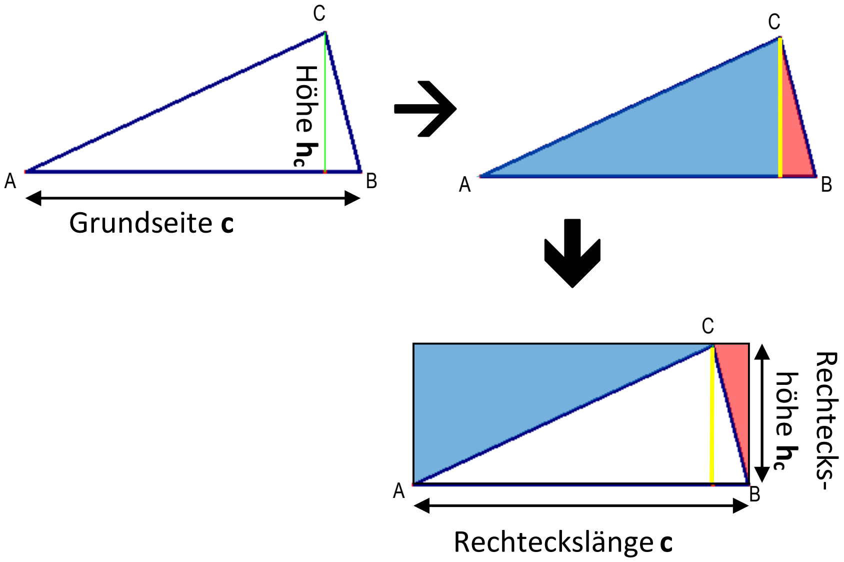
10. Flächenberechnung in Dreiecken

10.1 Aus Dreiecken Rechtecke machen.

Aus zwei Dreiecken kann man problemlos ein Rechteck basteln. Man darf die Dreiecke ja zerschneiden, die Teile neu anordnen und kann so dafür sorgen, dass man ein schönes, korrektes Rechteck bekommt. Dies sieht dann zum Beispiel mit rechtwinkligen Dreiecken so aus:



Wie man unschwer aus der Zeichnung entnehmen kann, bilden zwei gleich grosse Dreiecke ein Rechteck. Diese Überlegung funktioniert auch bei allgemeinen Dreiecken:



Das zweite, gleiche Dreieck wird entlang der Höhe zerschnitten. Die abgeschnittenen Teile werden wieder angesetzt.

Wir können also feststellen: Ein Dreieck ist ein halbes Rechteck.

<u>Fläche des Rechtecks:</u> Länge mal Breite **(** $\mathbf{c \bullet h_c}$**)**

<u>Fläche des Dreiecks:</u> Grundseite mal zugehörige Höhe durch 2 **(** $\mathbf{c \bullet h_c : 2}$ **)**

Es gilt somit für jedes Dreieck :

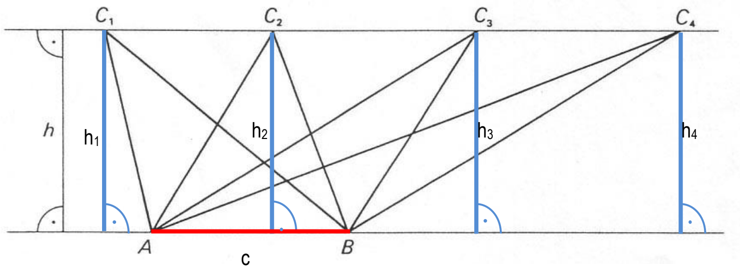
$$A_\triangle = (\textbf{Grundseite} \bullet \textbf{zugehörige Höhe}) : 2 = \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2}$$

Da es keine Rolle spielt, entlang welcher Höhe das Dreieck zerschnitten wird gilt logischerweise:

$$A_\triangle = (\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}) : 2 = \frac{a \bullet h_a}{2} = \frac{b \bullet h_b}{2} = \frac{c \bullet h_c}{2}$$

10.2 Dreiecke mit gleicher Höhe.

Wenn wir verschiedene Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe betrachten, so wird uns klar, dass deren Fläche – trotz verschiedenem Aussehen gleich sein muss. Denn Grundseite mal Höhe durch 2 ist unabhängig von der Form des Dreieckes.

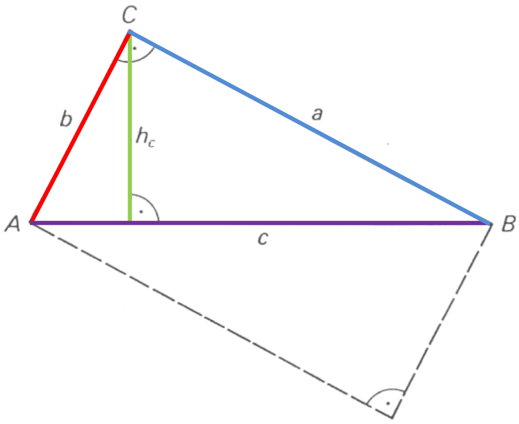


Weil $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_c$ gilt für alle Dreiecke:

$$A\triangle = \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2} = \frac{c \bullet h_c}{2}$$

Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher (zugehöriger) Höhe haben immer den gleichen Flächeninhalt

10.3 Spezialfall „rechtwinklige Dreiecke“



Im rechtwinkligen Dreieck kann die Fläche wie gewohnt berechnet werden:

$$A\triangle = \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2} = \frac{c \bullet h_c}{2}$$

Die spezielle Eigenschaft der Seiten a und b allerdings ist die, dass die Seite a gleichzeitig die Höhe h_b ist (die Seite a steht senkrecht auf der Seite b und geht durch den Eckpunkt B)
Und ebenso ist die Seite b gleichzeitig die Höhe h_a.

Somit kann die Fläche bei rechtwinkligen Dreiecken auch so berechnet werden:

$$A\triangle = \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2} = \frac{a \bullet h_a}{2} = \frac{b \bullet h_b}{2}$$

oder in Kurzform: A△= (a • b) : 2

Im rechtwinkligen Dreieck sind die beiden an den rechten Winkel angrenzenden Seiten (=Katheten) jeweils Grundseite und zugehörige Höhe.

Aufgaben “Flächenberechnung in Dreiecken“:

1. Konstruiere ein Dreieck mit a = 2 cm, b= 3 cm, c= 4cm. Berechne danach die Fläche dieses Dreiecks.

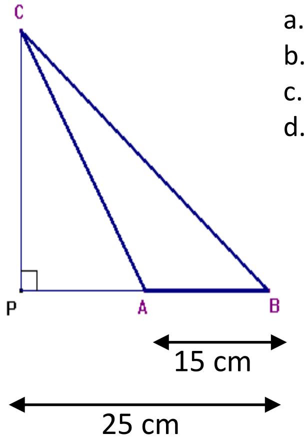
2. Berechne die Fläche eines Dreiecks mit der Höhe h_b= 15cm und der Seite b = 20cm.

3. Vervollständige die Tabelle (grau schattierte Zellen nicht berechnen. Runde auf 2 Kommastellen!)

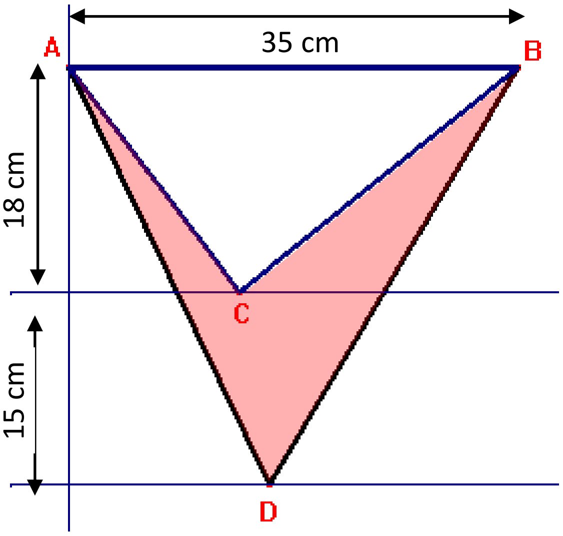
BC = a	AC = b	AB = c	ha	hb	hc	Fläche A
8 cm		10 cm	4cm			
9 cm	5 cm			12 cm	6 cm	
4 cm		9 cm		6 cm		52 cm^2
	2 cm		6 cm		10 cm	100 cm^2

4. Wie lange muss die Strecke CP ein, wenn das Dreieck ABC eine Fläche von

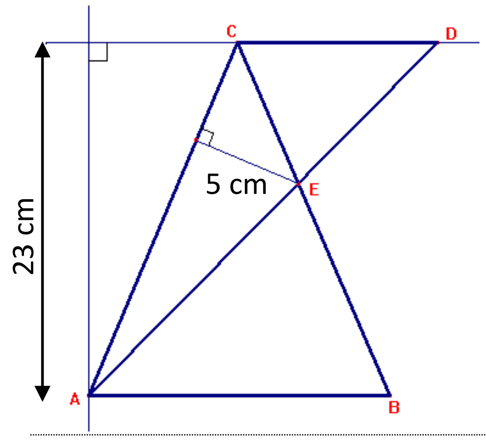
a. $50cm^2$ hat
b. $189\ cm^2$ hat
c. $94cm^2$ hat.
d. $62cm^2$ hat.



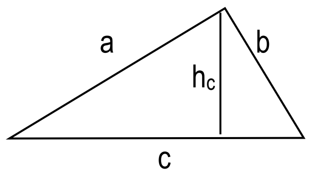
5. Berechne die Fläche der markierten Fläche.



6. Berechne die Fläche des Dreiecks CDE (CD = 8 cm, AB = 12cm, AC = 27 cm)

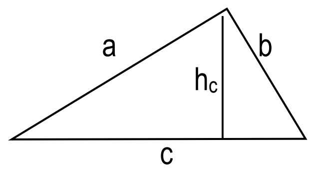


7. **Im rechtwinkligen Dreieck ist die Seite c = 20cm und die Höhe hc = 9.6cm. Berechne die Länge der Strecke b, wenn die Strecke a = 12cm.**



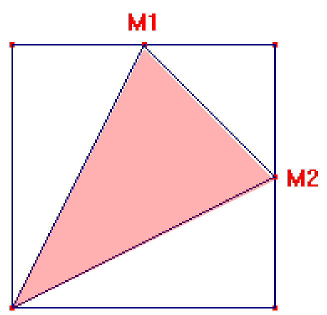
8. **Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Flächeninhalt von 200cm². Berechne**

- **a.** **die Seite a, wenn die Seite b = 50 cm und c = 60cm**
- **b.** **die Seite b, wenn die Seite a = 10cm und c = 60cm**
- **c.** **die Höhe h_c, wenn die Seite a = 15 cm und c = 20cm**



9. **Das abgebildete Quadrat hat einen Flächeninhalt von 100cm². Berechne**

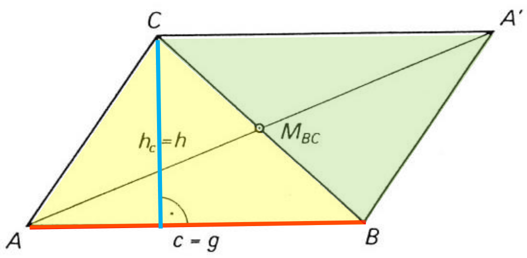
- **a.** **Den Inhalt der schraffierten Fläche in cm²**
- **b.** **Den Inhalt der schraffierten Fläche als Bruchteil der Quadratfläche.**



11. Flächenberechnung in Vierecken

11.1 Flächenberechnung im Rhomboid (Parallelenviereck mit AB ≠ BC).

Aus zwei Dreiecken kann man problemlos ein Rechteck basteln. Man darf die Dreiecke ja zerschneiden, die Teile



Den Rhomboid können wir in zwei gleich grosse Dreiecke aufteilen, zum Beispiel in die Dreiecke ABC und BA'C.

Die Fläche kann damit berechnet werden:

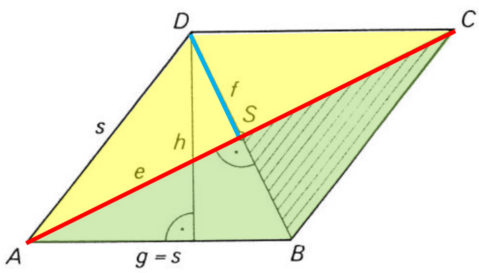
$$A_{▱} = 2 \bullet A_{\triangle} = 2 \bullet \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2} = 2 \bullet \frac{c \bullet h_c}{2}$$

Kurzform: $A_{▱} = \text{Grundseite} \bullet \text{Höhe} = c \bullet h_c = g \bullet h$

Die Fläche des Rhomboides berechnet sich durch Grundseite mal Höhe. Diese Berechnungsart ist auch für Rechtecke, den Rhombus und Quadrate gültig.

11.2 Spezialfall Rhombus (Parallelenviereck mit vier gleich langen Seiten).

Der Rhombus hat die gleichen Eigenschaften wie ein Rhomboid. Seine Fläche lässt sich also auch gleich berechnen, mit Grundseite mal Höhe.



Allgemeine Berechnung $A_{▱} = \text{Grundseite} \bullet \text{Höhe} = g \bullet h$

<u>**Doch der Rhombus hat noch mehr Eigenschaften**</u>: Seine Diagonalen stehen senkrecht und schneiden sich in der Mitte. Damit können wir zwei gleiche Dreiecke teilen, z.B. die Dreiecke ABC und ACD.

So ist die Fläche des Rhombus:

$$A_{▱} = 2 \bullet A_{\triangle} = 2 \bullet \frac{\text{Grundseite} \bullet \text{Höhe}}{2} = 2 \bullet \frac{e \bullet f:2}{2} = e \bullet f : 2$$

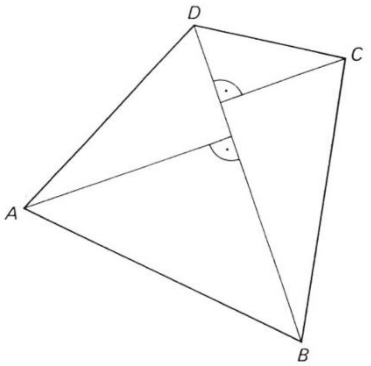
oder in Kurzform: $A_{▱} = (e \bullet f) : 2$

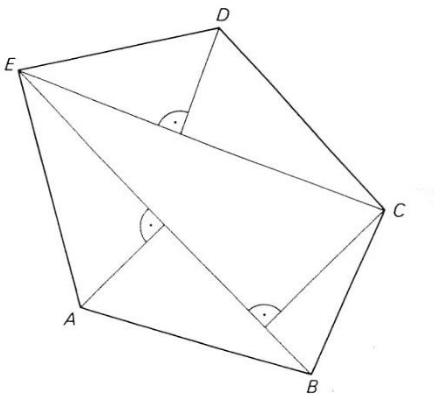
Die Fläche des Rhombus kann auch ausgerechnet werden, indem man die Diagonalen e und f miteinander multipliziert und das Ergebnis durch 2 teilt. A = (e • f) : 2

12. Flächenberechnung in allgemeinen Vielecken (Fläche im n-Eck)

Zusatzinformation
(In diesem Kapitel nicht im Lehrmittel enthalten)

Die Fläche von beliebigen Vielecke (n-Ecke) kann durch Zerlegung in Dreiecke problemlos berechnet werden:





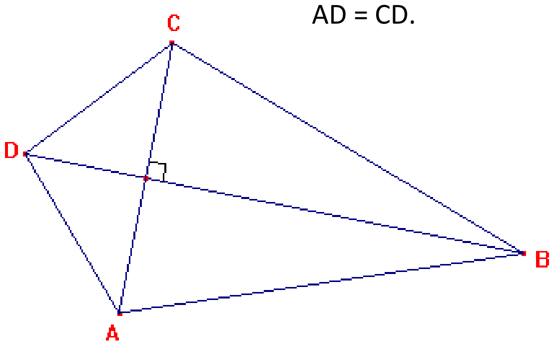
Die Fläche von jedem beliebigen n-Eck kann durch geeignete Unterteilung in Dreiecke ohne Schwierigkeiten berechnet werden.

Aufgaben "Flächenberechnung in Vierecken und allgemeinen Vierecken":

1. Berechne im Drachenviereck ABCD den Flächeninhalt A.

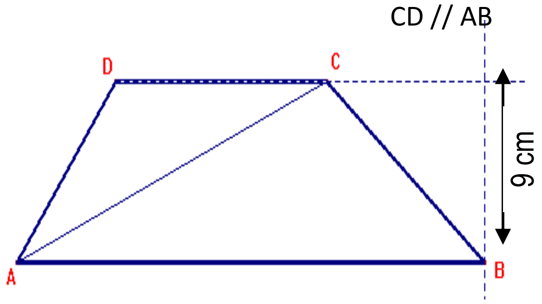
Gegeben: AC = 24cm, BD = 100cm, AD = CD.

Gesucht: Fläche A (in cm^2)



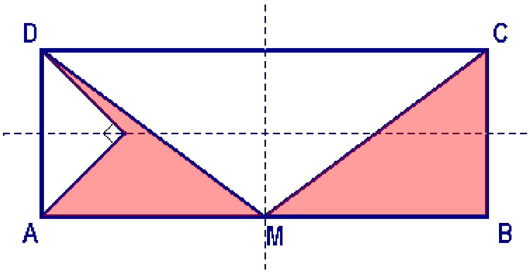
2. Berechne den Inhalt der Fläche ABCD

Gegeben: AB = 15 cm, CD = 7 cm, CD // AB



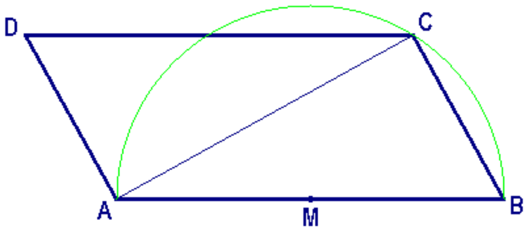
3. **Berechne den Inhalt der markierten Fläche**

<u>Gegeben</u>: AB = 20 cm
BC = 15 cm
CD // AB



4. **Berechne den Inhalt des Rhomboides ABCD**

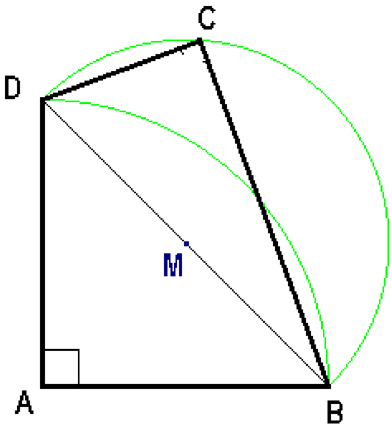
<u>Gegeben:</u> AB = CD = 15 cm
BC = AD = 9 cm
AC = 12 cm



Dreieck ABC rechtwinklig, 90° bei C!

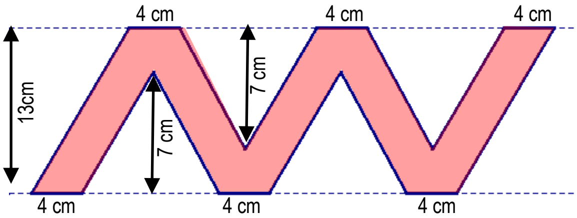
5. **Berechne den Inhalt des Vierecks ABCD**

<u>Gegeben:</u> AB = 10 cm, BC = 15 cm, CD = 7cm

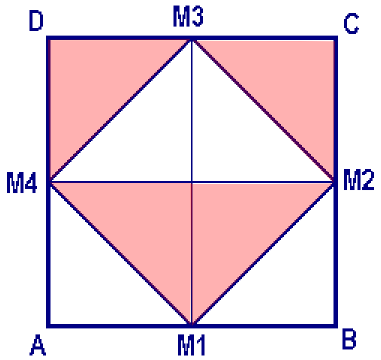


Dreieck BCD rechtwinklig, 90° bei C!

6. Berechne den Inhalt der abgebildeten Streifen-Fläche.

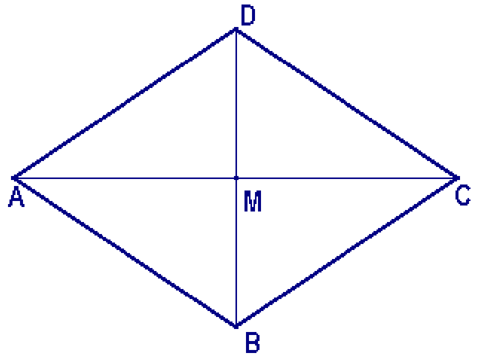


7. Berechne den Inhalt der markierten Fläche im Quadrat mit Seitenlänge 20cm.



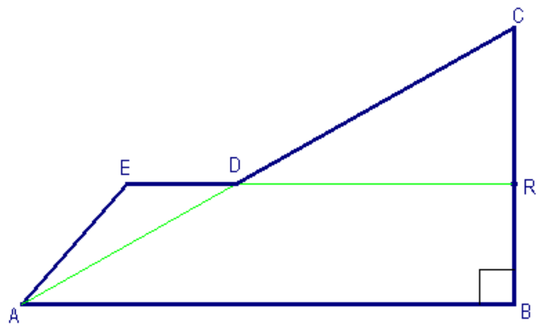
8. Berechne den Flächeninhalt des gegebenen Rhombus.

Gegeben: AB = 10cm, AM = 8 cm, BM = 6 cm



9. Berechne den Inhalt der gegebenen Figur.

Gegeben: AB = 13cm, BC = 8cm, CD = 6 cm, DE = 4cm, AE = 5 cm, BR = 3.5 cm. DR // AB



10. Berechne den Inhalt der gegebenen Figur.

Gegeben: AB = 10cm, BC = 6cm, CD = 4 cm, DE = 3 cm, EF=5.5 cm,
FA = 11 cm. GR = 7cm, PQ = DE, QE = 2cm, AR = FR,
ABCR ist ein Rhomboid, ARFG ist ein Rhombus.